Beobachtungen über harmonische Progressionen*

Leonhard Euler

§1 Unter der Bezeichnung der harmonischen Progressionen werden alle Reihen von Brüchen verstanden, deren Zähler einander gleich sind, die Nenner hingegen eine arithmetische Progression festlegen. Eine allgemeine Form dieser Art ist also

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2b}, \frac{c}{a+3b}, etc$$

Denn je drei benachbarte Terme, wie

$$\frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2b}, \frac{c}{a+3b}$$

haben diese Eigenschaft, dass die Differenzen der äußeren vom mittleren den äußeren selbst proportional sind. Es ist natürlich

$$\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b} : \frac{c}{a+2b} - \frac{c}{a+3b} = \frac{c}{a+b} : \frac{c}{a+3b}$$

Weil aber dies die Eigenschafte der harmonischen Proportion ist, sind Reihen von Brüchen dieser Art harmonische Progressionen genannt worden. Sie könnten auch Reziproken der ersten Ordnung genannt werden, weil im allgemeinen Term $\frac{c}{a+(n-1)b}$ der Index n eine einzige und negative Dimension hat.

*Originaltitel: „De progressionibus harmonicis obserationes", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11, 1740, pp. 150-161", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 87-100", eine Version veröffentlicht in *Comment. acad. sc. Petrop.* 7, ed. nova, Bononiae 1748, pp. 138-150 [E43a], Eneström-Nummer E 43, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Maximilian Bauer, im Rahmen des Hauptseminars „Euler", JGU Mainz

§2 Obwohl in diesen Reihen die Terme ununterbrochen schrumpfen, ist dennoch die Summe einer Reihe dieser Art ins Unendliche fortgesetzt immer unendlich. Um dies zu beweisen, ist keine Methode von Nöten, diese Reihen zu summieren, sondern die Gültigkeit wird sich leicht aus dem folgenden Prinzip zeigen. Eine die ins unendliche fortgesetzt eine endliche Summe hat, auch wenn sie doppelt so lang fortgesetzt wird, wird keine Zunahme erfahren, sondern das, was nach dem Unendlichen in der Vorstellung hinzugefügt wird, wird in Wirklichkeit unendlich klein sein. Wenn sich dies nämlich nicht so verhielte, wäre die Summe der Reihe, wenn auch ins Unendliche fortgesetzt, nicht bestimmt und deshalb nicht endlich. Daher folgt, wenn das, was aus der Fortsetzung über den infinitesimalen Term hinaus entspringt, von endlicher Größe ist, dass die Summe der Reihe notwendigerweise unendlich sein muss. Aus diesem Prinzip werden wir also beurteilen können, ob die Summe einer vorgelegten Reihe unendlich oder endlich ist.

§3 Es sei deshalb die Reihe

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2b}, etc$$

ins Unendliche fortgesetzt worden und der infinitesimale Term $\frac{c}{a+(i-1)b}$, während i eine unendliche Zahl bezeichnet, welche der Index dieses Termes ist. Nun werde diese Reihe vom Term $\frac{c}{a+ib}$ bis hin zum Term $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, dessen Exponent ni ist, weiter fortgesetzt. Die Anzahl dieser darüber hinaus hinzugefügten Terme ist also $(n-1)\,i$. Die Summe derer wird in der Tat kleiner sein als

$$\frac{(n-1)\,ic}{a+ib}$$

aber größer als

$$\frac{(n-1)\,ic}{a+(ni-1)\,b}$$

Aber weil i eine unendlich große Zahl ist, verschwindet a in jedem der beiden Nenner. Daher wird die Summe größer sein als

$$\frac{(n-1)\,c}{nb}$$

aber kleiner als

$$\frac{(n-1)\,c}{b}$$

Daher wird erkannt, dass diese Summe endlich und als logische Konsequenz die Summe der ins Unendliche fortgesetzten vorgelegten Reihe $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, etc unendlich groß ist.

§4 Aber von dieser Summe der Terme von i bis hin zu ni werden engere Grenzen aus den folgenden Eigenschaften der harmonischen Proportion gefunden. Natürlich ist jede harmonische Proportion so beschaffen, dass der mittlere Term kleiner ist als der dritte Teil der Summe aller Terme. Dieser Sache wegen wird der Mittelterm zwischen $\frac{c}{a+ib}$ und $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, der $\frac{c}{a+\frac{ni+i-1}{2}b}$ ist, mit der Anzahl der Terme $(n-1)\,i$ multipliziert oder

$$\frac{(n-1)\,ic}{a+\frac{ni+i-1}{2}b}$$

kleiner sein als die Summe der Terme. Oder die Summe der Terme wird daher größer sein als

$$\frac{2\,(n-1)\,c}{(n+1)\,b}$$

wegen des unendlichen i. Außerdem ist das arithmetische Mittel zwischen den äußeren Termen größer als der dritte Term der Summe der Terme. Daher folgt, dass auch in der harmonischen Reihe die Summe der Terme kleiner sein wird als $(n-1)\,i$ mit dem arithmetischen Mittel der äußeren Terme, das heißt

$$\frac{(2a+(ni+i-1)\,b)\,c}{2\,(a+bi)\,(a+(ni-b)\,b)} \quad \text{oder} \quad \frac{(n+1)\,c}{2nib}$$

multipliziert. Daher wird die Summe kleiner sein als

$$\frac{\left(n^2-1\right)c}{2nb}$$

so dass diese zwei Grenzen sind

$$\frac{2\,(n-1)\,c}{(n+1)\,b} \quad \text{und} \quad \frac{\left(n^2-1\right)c}{2nb}$$

und daher die Summe näherungsweise

$$=\frac{(n-1)\,c}{b\sqrt{n}}$$

was das proportionale Mittel zwischen den Grenzen ist.

§5 Aus diesen lässt sich berechnen, in welchen Fällen die allgemeine Reihe $\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2^\alpha b}$, etc ins Unendliche bis hinzu $\frac{c}{a+i^\alpha b}$ eine endliche oder unendliche Summe hat. Es folgen nämlich diesem letzten Term $(n-1)\,i$ Terme und die Summe dieser wird kleiner sein als

$$\frac{(n-1)\,c}{n^\alpha i^{\alpha-1} b}$$

Wenn daher die Zahl α eine größere Zahl als die Einheit war, wird die Summe dieser folgenden Terme $= 0$ und deshalb die Summe der Progression endlich sein. Aber wenn $\alpha < 1$ ist , wird die Summe der folgenden Terme unendlich sein, weshalb die Summe dieser Progression selbst in unendlichfach größerem Grade unendlich sein wird. Unter diesen Progressionen hat also allein die harmonische, in welcher $\alpha = 1$ ist, die Eigenschaft, dass die Summe ihrer ins Unendliche fortgesetzt unendlich groß ist, die Summe der folgenden Terme nach dem infinitesimalen Term hingegen endlich ist.

§6 Wie groß aber die Summe der Terme von Term des Index i bis hin zum Term des Index ni ist, untersuche ich auf die folgende Weise. Die Summe der Reihe

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \ldots, \frac{c}{a+(i-1)\,b}$$

bis hin zum Term des Index i werde $= s$ gesetzt, welches eine aus a, b, c und i zu bestimmende Größe ist. Es wachse i um eine Einheit und s wird als Vermehrung den folgenden Term $\frac{c}{a+ib}$ haben. Daher wird sein

$$di : ds = 1 : \frac{c}{a+ib} \quad \text{oder} \quad ds = \frac{cdi}{a+ib}$$

Daher wird gefunden

$$s = C + \frac{c}{b} \ln(a+ib)$$

während C eine gewisse konstante Größe bezeichnet. Es ist aber auch klar, dass aus dieser Form derselben Reihe vom Anfang bis hin zum Term des Index ni fortgesetzt sein wird

$$= C + \frac{c}{b} \ln(a+nib)$$

Die Differenz dieser Summen also

$$\frac{c}{b} \ln \frac{a+nib}{a+ib} = \frac{c}{b} \ln n \quad \text{(weil } a \text{ verschwindet)}$$

wird die Summe der Terme von $\frac{c}{a+ib}$ bis hin zu $\frac{c}{a+nib}$ geben. Weil wir aber die Grenzen dieser Summe oben angegeben haben, wird $\frac{c}{b}\ln n$ größer sein als $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ und kleiner als $\frac{\left(n^2-1\right)c}{2nb}$, oder

$$\ln n > \frac{2\,(n-1)}{n+1} \quad \text{und} \quad \ln n < \frac{n^2-1}{2n}$$

§7 Unten werden wir zeigen, dass jene Konstante C endlich ist und werden versuchen sie zu bestimmen. Es wird also C in der Summe verschwinden und es wird die Summe der Progression

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \dots, \frac{c}{a+(i-1)\,b}$$

während die unendliche Anzahl der Terme $= i$ ist, werden

$$= \frac{c}{b}\ln(a+ib) = \frac{c}{b}\ln i$$

Deswegen wird die Summe wie der Logarithmus der Anzahl der Terme und daher unendlichfach kleiner als die Wurzel einer beliebig großen Portenz aus der Anzahl der Terme sein; nichts desto weniger ist sie unendlich groß.

§8 Aus dieser Betrachtung entspringen unzählige Reihen, um Logarithmen gewisser Zahlen zu bezeichnen. Wir wollen zuerst diese harmonische Progression nehmen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+etc$$

für die $a=1, b=1, c=1$ wird. Also wird die Differenz zwischen dieser Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{i}$$

bis hin zum Term des Index i fortgesetzt und derselben

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{ni}$$

bis hin zum Term des Index ni fortgesetzt $= \ln n$ sein. Daher wird jene Reihe von dieser subtrahiert $\ln n$ zurücklassen. Weil aber die Anzahl der Terme dieser Reihe n mal so groß ist wie die jener, muss von n Termen der Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{ni}$$

jeweils einer der anderen Reihe subtrahiert werden

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}$$

damit die Subtraktion ins Unendliche auf dieselbe Weise durchgeführt werden kann. Daher wird sein

$$\begin{array}{llll} \ln n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} & +\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} & +\frac{1}{2n+1}+\cdots+\frac{1}{3n} & +etc \\ \qquad\qquad -1 & \qquad\qquad -\frac{1}{2} & \qquad\qquad -\frac{1}{3} & \end{array}$$

Wenn also die einzelnen Terme der unteren Reihe von den darüber geschriebenen Termen der oberen Reihe tatsächlich subtrahiert werden und für n die ganzen Zahlen $2, 3, 4, \ldots$, etc geschrieben werden, werden wir nacheinander die folgenden Reihen von Logarithmen erhalten:

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+etc\\
\ln 3 &= 1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{2}{12}+etc\\
\ln 4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}+etc\\
\ln 5 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{4}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+etc\\
\ln 6 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{5}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{5}{12}+etc\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad etc
\end{aligned}$$

Daher wird für den Logarithmus jeder Zahl leicht eine konvergente Reihe gefunden.

§9 Aus diesen Reihen können andere derselben Form, welche eine rationale Summe haben, abgeleitet werden. Denn, weil das Doppelte der Reihe $= \ln 2$ gleich $\ln 4$ ist, wenn man die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+etc$$

von dieser subtrahiert wird

$$2-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+etc$$

wird der Rest, natürlich diese Reihe

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} + etc$$

$= 0$ sein, oder

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{3}{10} + etc$$

Wenn gleichermaßen die $\ln 6$ darbietende Reihe von der Summe der $\ln 2$ und $\ln 3$ darbietenden Reihen subtrahiert wird, wird der Rest, natürlich

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10} + etc$$

$= 0$ sein, oder

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10} - etc$$

Auf die gleiche Weise werden unzählige Reihen dieser Art gefunden werden können.

§10 Jene die Logarithmen ausdrückenden Reihen konvergieren zwar, aber sehr langsam, woher, damit mit deren Hilfe Logarithmen angenehm gefunden werden können, ein Hilfsmittel gebraucht wird. Um dieses zu finden, muss bemerkt werden, dass diese Reihen nicht gleichmäßig fortschreiten, sondern gewisse Perioden haben, die in so vielen Termen absolviert werden, wie n Einheiten hat; so viele zugleich genommene Terme werde ich daher ein Glied nennen. So werden in der Reihe für $\ln 2$ zwei Terme ein Glied festlegen, in der Reihe für $\ln 3$ drei, in der Reihe für $\ln 4$ vier und so weiter. Also werden diese Glieder eine gleichmäßige Reihe festlegen und um Logarithmen zu finden, müssen einige Glieder addiert werden. Wir wollen festlegen, dass schon m Glieder addiert worden sind, um den Logarithmus von zwei zu finden, und es wird anstelle aller folgenden $\frac{1}{4m}$ addiert werden können, was umso näher herankommen wird, umso größer die Zahl m war. Um $\ln 3$ zu finden, werde zu m schon addierten Gliedern anstelle aller folgenden $\frac{1}{9m}$ addiert. Gleichermaßen muss für $\ln 4$ $\frac{1}{16m}$ addiert werden und so weiter. Es fließen diese Dinge aus der in §6 verwendeten Summationsweise heraus; weil in dieser m eine sehr große Größe sein muss, habe ich im Differential die m selbst hinzugefügten Teile missachtet, damit die Integration nicht von Logarithmen abhängt.

§11 Damit aber die Summe, wenn auch unendliche, der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{i}$ genau bestimmt wird, drücke ich die einzelnen Terme auf die folgende Weise aus: Es ist

$$
\begin{aligned}
1 &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + etc\\
\frac{1}{2} &= \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1}{5\cdot 32} + etc\\
\frac{1}{3} &= \ln \frac{4}{3} + \frac{1}{2\cdot 9} - \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{4\cdot 81} - \frac{1}{5\cdot 243} + etc\\
\frac{1}{4} &= \ln \frac{5}{4} + \frac{1}{2\cdot 16} - \frac{1}{3\cdot 64} + \frac{1}{4\cdot 256} - \frac{1}{5\cdot 1024} + etc\\
&\vdots\\
\frac{1}{i} &= \ln \frac{i+1}{i} + \frac{1}{2\cdot i^2} - \frac{1}{3\cdot i^3} + \frac{1}{4\cdot i^4} - \frac{1}{5\cdot i^5} + etc
\end{aligned}
$$

Nach Addieren dieser Reihen wird hervorgehen

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} = \ln(i+1) &+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + etc\right)\\
&- \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + etc\right)\\
&+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + etc\right)\\
&etc
\end{aligned}
$$

Weil diese Reihen konvergent sind, wenn sie näherungsweise summiert werden, wird hervorgehen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} = \ln(i+1) + 0{,}577218$$

Wenn diese Summe s genannt wird, wird, wie wir es oben gemacht haben, sein

$$ds = \frac{di}{i+1} \quad \text{und daher} \quad s = \ln(i+1) + C$$

Wir haben also den Wert dieser Konstante C entdeckt, es ist natürlich $C = 0{,}577218$.

§12 Wenn die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}$ weiter ins Unendliche fortgesetzt wird und in Glieder aufgeteilt wird, von denen jedes wie die Reihe selbst i Terme enthält, wird das zwischen $\frac{1}{i}$ und $\frac{1}{2i}$ enthaltende Glied $\ln 2$ sein, das folgende $=\ln\frac{3}{2}$, das dritte $=\ln\frac{4}{3}$ etc. Und weil die Summe der Reihe selbst ein Logarithmus des Unendlichen ist, wird in Analogie $\ln\frac{1}{0}$ gesetzt werden können. Und auf diese Weise werden wir das folgende nicht wenig sonderbare Schema finden:

Reihen	$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}$	$+\cdots+\frac{1}{2i}$	$+\cdots+\frac{1}{3i}$	$+\cdots+\frac{1}{4i}$	$+\cdots+\frac{1}{5i}$	etc
Summen	$\ln\frac{1}{0}$	$\ln\frac{2}{1}$	$\ln\frac{3}{2}$	$\ln\frac{4}{3}$	$\ln\frac{5}{4}$	

§13 Es mag freilich schwierig erscheinen, diese selben Eigenschaften der harmonischen Progression und Ausdrücke der Logarithmen analytisch auf dieselbe Weise, welche ich anderswo, um Reihen zu summieren, angegeben habe, zu finden. Aber dem die Sache aufmerksamer Betrachtenden wird klar werden, dass dies nicht nur geschehen kann, sondern es ist entdeckt worden, dass dies sogar um Vieles allgemeiner geschehen kann. Ich betrachte nämlich nicht die einfache harmonische Progression sondern die mit der geometrischen Verbundene, von welcher Art diese ist

$$\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{a+b}+\frac{cx^3}{a+2b}+\frac{cx^4}{a+3b}+etc$$

Ich setze die Summe von dieser s und nach Multiplizieren jeder der beiden Seiten mit $bx^{\frac{a-b}{b}}$ wird sein

$$bx^{\frac{a-b}{b}}s=\frac{bcx^{\frac{a}{b}}}{a}+\frac{bcx^{\frac{a+b}{b}}}{a+b}+\frac{bcx^{\frac{a+2b}{b}}}{a+2b}+etc$$

Nach Nehmen von Differentialen wird man haben

$$bD.x^{\frac{a-b}{b}}s=dx\left(cx^{\frac{a-b}{b}}+cx^{\frac{a}{b}}+cx^{\frac{a+b}{b}}+etc\right)=\frac{cx^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$$

Und nachdem wiederum die Integrale genommen worden sind, wird sein

$$bx^{\frac{a-b}{b}}s=c\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$$

und

$$s=\frac{c}{bx^{\frac{a-b}{b}}}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$$

Von dieser Reihe subtrahiere ich nun diese

$$\frac{fx^m}{g} + \frac{fx^{2m}}{g+h} + \frac{fx^{3m}}{g+2h} + etc$$

deren Summe t sei. Es werde multipliziert mit

$$\frac{h}{m} x^{\frac{m(g-h)}{h}}$$

und es wird sein

$$\frac{h}{m} x^{\frac{m(g-h)}{h}} t = \frac{fhx^{\frac{mg}{h}}}{mg} + \frac{fhx^{\frac{m(g+h)}{h}}}{m(g+h)} + \frac{fhx^{\frac{m(g+2h)}{h}}}{m(g+2h)} + etc$$

Und nach Nehmen von Differentialen wird werden

$$\frac{h}{m} D.x^{\frac{m(g-h)}{h}} t = dx \left(fx^{\frac{mg-h}{h}} + fx^{\frac{m(g+h)-h}{h}} + fx^{\frac{m(g+2h)-h}{h}} + etc \right) = \frac{fx^{\frac{mg-h}{h}} dx}{1-x^m}$$

Daher wird man haben

$$t = \frac{fm}{hx^{\frac{m(g-h)}{h}}} \int \frac{x^{\frac{mg-h}{h}} dx}{1-x^m}$$

Und daher

$$s - t = \frac{c}{bx^{\frac{a-b}{b}}} \int \frac{x^{\frac{a-b}{b}} dx}{1-x} - \frac{fm}{hx^{\frac{m(g-h)}{h}}} \int \frac{x^{\frac{mg-h}{h}} dx}{1-x^m}$$

Die Subtraktion muss aber so geschehen, dass vom Term des Index m der Reihe s der erste Term der Reihe t subtrahiert wird und vom Term des Index $2m$ jener der zweite Term dieser Reihe und so weiter.

§14 Damit wir unsere logarithmischen Reihen finden, sei $a = b$ und $g = h$. Danach wird sein

$$s = \frac{c}{b} \int \frac{dx}{1-x} = \frac{c}{b} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

und

$$t = \frac{f}{h} \int \frac{mx^{m-1} dx}{1-x^m} = \frac{f}{h} \ln \left(\frac{1}{1-x^m} \right)$$

Also ist

$$s - t = \ln \frac{(1-x^m)^{\frac{f}{h}}}{(1-x)^{\frac{c}{b}}}$$

Damit aber dieser Ausdruck für $x = 1$ gesetzt endlich wird, wird $\frac{f}{h} = \frac{c}{b}$ sein müssen; dieser Sache wegen werden alle diese Buchstaben $= 1$ und es wird sein

$$s - t = \ln \frac{1 - x^m}{1 - x} = \ln \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right)$$

Dieser Ausdruck gibt die Differenz zwischen diesen Reihen

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + etc \quad \text{und} \quad \frac{x^m}{1} + \frac{x^{2m}}{2} + \frac{x^{3m}}{3} + etc$$

Wenn daher $m = 2$ ist, wird sein

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + etc$$

wenn $m = 3$ ist, wird sein

$$\ln\left(1 + x + x^2\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + etc$$

und auf die gleiche Weise

$$\ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + etc$$

Wenn in diesen $x = 1$ wird, werden dieselben Reihen für die Logarithmen natürlicher Zahlen, welche wir zuvor [§8] gegeben haben.

§15 Wenn $h = 2g$ ist, wird sein

$$t = \frac{fx^{\frac{m}{2}}}{h} \int \frac{mx^{\frac{m-2}{2}}dx}{1 - x^m}$$

Es werde $x^m = y$ gesetzt; es wird sein

$$t = \frac{f\sqrt{y}}{h} \int \frac{dy}{(1 - y)\sqrt{y}} = \frac{f\sqrt{y}}{h} \ln \frac{1 + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{y}} = \frac{fx^{\frac{m}{2}}}{h} \ln \frac{1 + x^{\frac{m}{2}}}{1 - x^{\frac{m}{2}}}$$

Wenn außerdem $a = b$ ist, wird sein

$$s = \frac{c}{b} \ln \frac{1}{1 - x}$$

Aber s ist die Summe dieser Reihe

$$\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{2a}+\frac{cx^3}{3a}+etc$$

und

$$tx^{\frac{-m}{2}}=\frac{f}{h}\ln\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$$

gibt diese Reihe

$$\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{g}+\frac{fx^{\frac{3m}{2}}}{3g}+\frac{fx^{\frac{5m}{2}}}{5g}+etc$$

Es sei $a=1$ und $g=1$; es wird sein

$$s-tx^{\frac{-m}{2}}=c\ln\frac{1}{1-x}-\frac{f}{2}\ln\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}=\ln\frac{\left(1-x^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{f}{2}}}{(1-x)^c\left(1+x^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{f}{2}}}$$

Damit dieser Ausdruck endlich wird, wenn $x=1$ ist, ist es von Nöten, dass $\frac{f}{2}=c$ oder $f=2c$ ist. Es sei also $c=1$ und $m=2n$; es wird die Differenz der Reihen

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+etc$$

und

$$\frac{2x^n}{1}+\frac{2x^{3n}}{3}+\frac{2x^{5n}}{5}+etc$$

sein

$$=\ln\frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}$$

Es werde $n=2$ gesetzt; es wird die Differenz diese sein $=\ln\frac{1+x}{1+x^2}$ und für $x=1$ gesetzt wird sie $=0$ sein, woher diese Reihe

$$1-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{6}+\frac{1}{7}+etc$$

$=0$ sein wird, wie wir schon oben [§9] gefunden haben.

§16 Reihen von dieser Art, die eine rationale Summe haben, können nun aus dieser Form selbst $\ln\frac{1+x}{1+xx}$ unendlich viele andere gefunden werden, indem andere ähnliche Formeln angenommen werden, die für $x=1$ gesetzt verschwinden. Aus dieser Form $\ln\frac{1+x}{1+x^2}$, wenn sie durch Reihen ausgedrückt werden, resultiert nämlich die gefundene Reihe. Es ist natürlich

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - etc$$

und

$$\ln\left(1+x^2\right) = \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - etc$$

Diese Reihe lässt also von der oberen subtrahiert diese zurück

$$\frac{x}{1} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{3x^6}{6} + etc$$

deren Summe $\ln\frac{1+x}{1+x^2}$ sein wird. Gleichermaßen wird $\ln\frac{1+x}{1+x^3}$ diese Reihe geben

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9} - etc$$

Also wird für $x=1$ gesetzt sein

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - etc$$

welche selbe wir schon in §9 gefunden haben.

§17 Auf diese Weise werden also die Summen aller unregelmäßigen Reihen von dieser Art, die dennoch nach Gliedern regelmäßig fortschreiten, gefunden werden können; sie sind nämlich immer wie die Differenzen zweier Reihen anzusehen. Wie diese Reihe vorgelegt sei

$$1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + etc$$

Diese ist die Differenz dieser Reihen

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + etc$$

und

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^8}{8} + etc$$

für $x = 1$ gesetzt. Die Summe von jener ist $\ln \frac{1}{1-x}$, die Summe von dieser ist hingegen $\int \frac{3xdx}{1-x}$ oder

$$\ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + x + 1\right) + \frac{\sqrt{-3}}{2} \ln \frac{2x+1+\sqrt{-3}}{2x+1+\sqrt{-3}} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \ln \frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$$

Nachdem also diese von jener subtrahiert worden ist und $x = 1$ gesetzt worden ist, wird

$$-\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{\sqrt{-3}}{2} \ln \frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}$$

für die Summe der vorgelegten Progression hervorgehen. Es ist in der Tat $\frac{\sqrt{-3}}{2} \ln \frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}$ die durch $\sqrt{3}$ geteilte Peripherie des Kreises, nachdem der Durchmesser $= 1$ gesetzt worden ist, und $\frac{\sqrt{-3}}{2} \ln \frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$ dessen Hälfte. Daher wird die Summe dieser Reihe näherungsweise $0,3576$ sein.

§18 Aber wenn auch die Glieder selbst nicht gleichermaßen eingehen, wird die Summe schwerer angegeben. Wir wollen diese Reihe nehmen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{3}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{4}{14} + etc$$

Diese ist aber die Differenz zwischen diesen Reihen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{i \cdot \frac{i+3}{2}}$$

und

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{9} + \frac{5}{14} + \cdots + \frac{i+1}{i \cdot \frac{i+3}{2}}$$

jeweils so ins Unendliche fortgesetzt, dass die äußersten Terme denselben Nenner $i \cdot \frac{i+3}{2}$ haben. Die Summe der ersten der Reihen ist $C + \ln i + \ln(i+3) - \ln 2$ während C wie in §11 bezeichnet, natürlich $0,577218$. Die andere zu subtrahierende Reihe wird in diese zwei aufgelöst

$$\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{i}\right)$$

und

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{i+3}\right)$$

Die Summe jener ist $\frac{2}{3}C + \frac{2}{3}\ln i$, die dieser hingegen $\frac{4}{3}C - \frac{22}{9} + 4\ln(i+3)$. Diese beiden lassen von jener Summe $C + \ln i + \ln(i+3) - \ln 2$ subtrahiert $-C + \frac{22}{9} - \ln 2$ oder sehr nahe $1,174078$ für die Summe der vorgelegten Reihe zurück.